Základný rastový model

Rastislav Jurga

1. Úvod

Najjednoduchší rastový model vychádza z analýzy akumulácie kapitálu pri neexistencii technického pokroku. V tomto modeli sa pre jednoduchosť predpokladá jediný homogénny tovar, ktorý je možno použiť ako ku spotrebe tak i ako dokonale prispôsobivý kapitál. Tieto predpoklady umožňujú použiť produkčnú funkciu, v ktorej je množstvo potrebného kapitálu merateľné a v každom prípade nám umožňuje vyjadriť celkovú produkciu buď pre spotrebu, alebo investície v jedinej zvolenej fyzickej jednotke.

Základný model, ktorý budeme prezentovať je najjednoduchší a súčastne najmenej pružný. Všeobecne sa predpokladá rovnováha na trhu výrobkov charakterizovaná stavovou podmienkou plného využitia kapacít a tokovou podmienkou vzťahu úspor a investícii. Pripojíme ďalej najjednoduchšiu formu rovnováhy na trhu práce. O pracovnej sile predpokladáme, že rastie s konštantnou relatívnou mierou a že jej objem je rovný dopytu na trhu výrobkov. Plné využitie kapitálu je ekvivalentné plnej zamestnanosti pracovnej sily.

Nech ďalej Y označuje produkciu (dôchodok) a K je množstvo kapitálu. Budeme študovať dve verzie základného modelu. V prvej verzii predpokladáme produkčnú funkciu s pevnými koeficientmi, teda

$$Y = \frac{K}{v}, v\rangle 0 \qquad (1.1)$$

s parametrom v, ktorého prevrátená hodnota je konštantný kapitalový koeficient, teda

$$\frac{Y}{K} = \frac{1}{v} \qquad (1.1')$$

Druhý pevný koeficient ukazuje potrebné množstvo práce, ktorú označujeme symbolom L, teda

$$L = uY \qquad (1.2)$$

Vzťah (1.2) určuje množstvo práce pre množstvo produkcie Y, explicitne sa však v riešení modelu nevyskytuje.

Druhá verzia ma formu multiplikátora – akcelerátora a je založená na investičnej funkcii ktorá spája výšku investícii zo zmenou produkcie pomocou parametra v, čo je kapitalový koeficient.

Obe verzie nepredpokladajú žiadne autonómne investície, predpokladajú však funkciu úspor v tvare priamej úmernosti s konštantným sklonom k úsporám s, teda

$$S = sY, \qquad 0\langle s\langle 1 \qquad (1.3)$$

Budeme taktiež predpokladať konštantnú relatívnu mieru rastu pracovnej sily, označíme ju symbolom n.

V oboch prípadoch má teda model tri parametre : s, v, n.

2. Verzia s pevnými koeficientmi

Budeme špecifikovať premenné v uvažovanom základnom modeli so spojitým časom. Sú to produkcia (dôchodok) Y a pracovná sila L, obe ako toky za jednotku času. Ďalej je to množstvo kapitálu K, pričom tok investícii je zavedený vzťahom

$$I = \frac{dK}{dt} \tag{2.1}$$

Všetky premenné sú spojité a diferencovateľné funkcie času. Podmienka plného využitia kapacít je daná vzťahom

$$K = vY, \qquad v \rangle 0 \tag{2.2}$$

Uvažujme tiež tokovú podmienku na trhu výrobkov, ktorá pri neexistencii oneskorenia má tvar

$$\frac{dK}{dt} = sY\,, \quad 0 \langle s \langle 1 \tag{2.3}$$

Rovnováha na trhu práce je daná plnou zamestnanosťou pracovnej sily. Ponuka práce rastie z danou konštantnou relatívnou mierou n, teda platí:

$$\frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = \frac{d\ln L}{dt} = n \tag{2.4}$$

Riešme rovnicu (2.4) separáciou premenných, teda

$$\frac{dL}{L} = ndt$$

z čoho po integrácii máme

$$\ln L = nt + c$$

kde c je integračná konštanta. Z predchádzajúceho vzťahu vyplýva

$$L = e^{nt+c} = Ce^{nt}$$

Využijeme počiatočnú podmienku: ak t = 0 tak $L = L_0$. potom

$$L_0 = C\,e^0 = C$$

a teda ponuka práce je

$$L = L_0\,e^{nt} \tag{2.5}$$

Dopyt po práci určíme z druhého pevného koeficienta, t.j. zo vzťahu (1.2), teda L = uY. Podmienka rovnováhy na trhu práce potom je

$$L = uY = L_0 e^{nt}$$

Teda uvažovaný základný model má tri premenné závislé na čase: Y, K, L. ich priebeh je určený tromi podmienkami rovnováhy

$$K = vY \text{.......................plné využitie kapacít}$$

$$\frac{dK}{dt} = sY \text{ ....rovnosť úspor a investícií} \tag{2.6}$$

$$L = uY = L_0 e^{nt} \text{ ....plná zamestnanosť}$$

Riešme sústavu (2.6). Derivujme najprv prvú rovnicu sústavy podľa času, dostaneme

$$\frac{dK}{dt} = v\frac{dY}{dt}$$

a dosadíme do druhej rovnice za $\frac{dK}{dt}$, dostaneme

$$v\frac{dY}{dt} = sY$$

Poslednú rovnicu riešime separáciou premenných

$$\frac{dY}{Y} = \frac{s}{v}dt$$

označme $\frac{s}{v} = g$ a nazvime g zaručenou mierou rastu.
Teda

$$\frac{dY}{Y} = gdt$$

Integráciou poslednej rovnice máme

$$\ln Y = gt + c \tag{2.7}$$

z čoho

$$Y = e^{gt+c} = Ce^{gt}$$

Využijeme počiatočnú podmienku: ak t = 0 tak $Y = Y_0$, teda

$$Y_0 = e^0 C = C$$

Teda pre priebeh dôchodku v závislosti na čase platí

$$Y = Y_0 e^{gt}, \qquad g = \frac{s}{v} \tag{2.8}$$

Potom z prvej rovnice máme

$$K = vY$$

a teda po dosadení z (2.8) máme

$$K = vY_0 e^{gt} = K_0 e^{gt}, \qquad K_0 = vY_0 \tag{2.9}$$

Zaručená miera rastu premennej Y a K je $g = \frac{s}{v}$.

Pevný koeficient u $(u \rangle 0)$ v tretej podmienke spája L a Y, totiž L = uY. Po zlogaritmovaní dostaneme

$$\ln L = \ln u + \ln Y$$

z čoho po derivácii máme

$$\frac{d \ln L}{dt} = \frac{d \ln Y}{dt}$$

Podľa posledného vzťahu relatívna miera rastu premennej L (dopytu po práci) musí byť zhodná z relatívnou mierou rastu premennej Y. zrejme platí

$$\frac{d \ln L}{dt} = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = n$$

a tiež podľa (2.7)

$$\frac{d \ln Y}{dt} = \frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = g$$

Tretia podmienka je splnená ak platí

$$g = \frac{s}{v} = n \tag{2.10}$$

t.j. ak zaručená miera rastu g sa rovná prirodzenej miere rastu n.

Ak je podmienka (2.10) splnená tak priebehy uvažovaných troch premenných sú

$$Y = Y_0 e^{gt}, K = K_0 e^{gt}, L = L_0 e^{gt} \tag{2.11}$$

kde $g = \frac{s}{v} = n$. Pevný koeficient u sa v riešení nevyskytuje. Je potrebné si uvedomiť interpretáciu pevného koeficienta v použitého v tejto verzií. Vzťah K = vY ako podmienku plného využitia kapacít je potrebné interpretovať takto: ak je dané množstvo kapitálu K tak kapacitne možná produkcia je $Y = \frac{K}{v}$.

Uvedieme modifikáciu modelu (2.6). Nebudeme zavádzať množstvo kapitálu a produkčnú funkciu. Podmienku plného využitia kapacít K = vY uvažujme v derivovanom tvare, teda

$$\frac{dK}{dt} = v\frac{dY}{dt}$$

pričom $\frac{dK}{dt}$ interpretujeme ako investície, teda

$$I = \frac{dK}{dt}$$

pričom I je spojitá diferencovateľné funkcia času. Základný model má teraz tri premenné: Y, I, L, ich priebeh v čase je určený troma podmienkami rovnováhy

$$I = v\frac{dY}{dt} \text{......................plné využite kapacít}$$

$$I = sY \text{..........................rovnosť úspor a investícií} \qquad (2.12)$$

$$L = uY = L_0 e^{nt} \text{............plná zamestnanosť}$$

Riešme sústavu (2.12). Dosadíme druhú rovnicu do prvej, dostaneme

$$v\frac{dY}{dt} = sY$$

Po separácii premenných máme

$$\frac{dY}{Y} = \frac{s}{v}dt = gdt$$

čo je rovnaká rovnica ako pri riešení sústavy (2.6) a teda aj riešenie je rovnaké, teda má tvar

$$Y = Y_0 e^{gt}$$

Potom keďže I = sY, tak

$$I = I_0 e^{gt}, I_0 = sY_0$$

a tiež

$$L = L_0 e^{gt}, L_0 = uY_0$$

teda úplne riešenie je

$$Y = Y_0 e^{gt}, I = I_0 e^{gt}, L = L_0 e^{gt}$$

kde $g = \frac{s}{v} = n$.

Vo variante (2.12) základného modelu explicitne nevystupuje množstvo kapitálu K ani jeho vzťah k produkcií v tvare K = vY. Napriek tomu tu máme pomer produkcie ku kapitálu, ako to vyplýva z prvej rovnice sústavy (2.12)

$$\frac{dK}{dt} = v\frac{dY}{dt}$$

a odkiaľ

$$\frac{\frac{dY}{dt}}{\frac{dK}{dt}} = \frac{1}{v} = \text{konšt.}$$

čiže

$$\frac{dY}{dK} = \frac{1}{v} = \text{konšt.}$$

čo je pomer produkcie ku kapitálu ale v prírastkovom tvare. Interpretácia je taká, že investície vyvolávajú zmenu v kapacitne možnej produkcií v určitom pomere $\left(\frac{1}{v}\right)$ pričom model je konštruovaný tak že tento pomer je v čase konštantný.

3. Verzia s multiplikátorom – akcelerátorom

Druhá verzia základného modelu prináša v ekonomickej konštrukcií dve zmeny. Po prvé, prevracia sa interpretácia parametra v ako pomeru kapitálu k produkcii, teda

$$v = \frac{K}{Y} \tag{3.1}$$

Ekonomický význam koeficienta v je teraz taký, že požadované množstvo kapitálu je konštantným násobkom (v) produkcie, teda K = vY. Po druhé sa tento pomer mení v prírastkový tvar, takže zmena požadovaného množstva kapitálu, je násobkom (v) zmeny produkcie. Stavová podmienka plného využitia kapacít tak iba znamená, že zmena požadovaného množstva kapitálu sa chápe skutočné investície. Podmienka rovnováhy potom je

$$I = v\frac{dY}{dt} \tag{3.2}$$

čo je však investičná funkcia založená na akceleračnom princípe v ktorej explicitne nevystupuje množstvo kapitálu.

Ak pridáme tokovú podmienku rovnosti, úspora investícií na trhu výrobkov a podmienku plnej zamestnanosti na trhu práce, dostaneme, tri podmienky rovnováhy pre premenné Y, I a L

$$\begin{aligned} I &= v\frac{dY}{dt} \text{......................investičná funkcia} \\ I &= sY \text{...........................rovnosť úspor a investícií} \\ L &= uY = L_0 e^{nt} \text{ ....plná zamestnanosť} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Rovnice (3.3) sú presne rovnice (2.12) a preto aj ich riešenie je totožné, teda

$$Y = Y_0 e^{gt}, I = I_0 e^{gt}, L = L_0 e^{gt}$$

kde $g = \frac{s}{v} = n$ pričom pre počiatočné hodnoty platí $I_0 = sY_0$, $L_0 = uY_0$.

Je zrejmé, že multiplikátor a akcelerátor sa v modeli (3.3) dopĺňajú. Každá jednotka investícií je, ako udáva toková podmienka (I = sY) multiplikovaná do produkcie (dôchodku) násobkom $\frac{1}{s}$, totiž platí

$$Y = \frac{1}{s} I$$

Po tomto zvýšení produkcie vytvoreného multiplikátorom prichádza akcelerátor

$$I = v\frac{dY}{dt}$$

ktorý vyvoláva ďalšie investície, ktoré multiplikátor opäť transformuje do nového zvýšenia produkcie. Ak raz dôjde k zvýšeniu produkcie tak multiplikátor a akcelerátor generujú stály rast.

4. Záver

Základný model je formulovaný pokiaľ sa týka jeho parametrov veľmi stroho, totiž musí platiť $\frac{s}{v} = n.$ Napriek tejto výhrade je možné považovať študovaný základný model ako východisko pre štúdium modelov lepšie aproximujúcich skutočnosť.

Kľúčové slová: dôchodok, kapitál, práca, rovnováha na trhu výrobkov a práce, plné využitie kapacít.

Abstract. This paper is directed to tho study and tu the solution of the basic economic model of growth. There are found the conditions of the equilibrium on the product and labour market and the condition of full utilization of the capital, too. It is found the solution of the considered model that it fullfils the initial conditions.

Literatúra:

1. Dornbusch, R., Fischer, S.: Macroeconomics, fifth edition. Nev-York Mc Graw – Hill Publishing Company, 1990.
2. Felderer, B., Homburg, S.: Macroeconomics and New Macroeconomics. Berlín, Springer Verlag, 1987.
3. Husár, J.: Aplikovaná makroekonómia. Bratislava, Sprint, 2003.
4. Jurga, R.: Akumulácia kapitálu a ekonomický rast. Podniková revue, Volume VI, Number 12, 2007
5. Jurga, R.: Kvantiatatívna makroekonómia. Bratislava, Ekonóm, 2007
6. Mlynarovič, V.: Kvantitatívna makroekonómia. Bratislava, Ekonóm 1998
7. Peller, F. Pinda, Ľ., Fecenko, J.: Matematika 3. Bratislava, IURA Edition, 2001
8. Popper, K., R.: Logika vědeckého bádaní. Praha, Oikoymenh, 1997.